TEMA 7

Sistemas de Ecuaciones lineales*

Llamaremos **ecuación lineal** con *n* incógnitas a la siguiente igualdad:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

Donde	a_i	Son números reales y se llaman coeficientes
	x_i	Son las incógnitas de la ecuación
	b	Número real llamado termino independiente

Como se ve en una ecuación lineal, todas la incógnitas tienen grado 1.

Ejemplos:

$7x - 5 = 0$ Ecuación lineal con 1 incógnita

$2x + 5y - 7z = 8$ Ecuación lineal con 3 incógnitas

$3xy - 5z = 9$ No es una ecuación lineal

$x^2 - 2x + 5 = 9$ No es lineal. Es una ecuación de segundo grado

$\frac{1}{x} + 5y = 3 \Leftrightarrow x^{-1} + 5y = 3$ No es ecuación lineal

Llamaremos **solución de una ecuación lineal** a *n* números reales ordenados $(c_1,c_2,\dots,c_n) \in R^n$ tal que al sustituir x_1 por c_1, x_2 por c_2, ..., x_n por c_n se cumple la igualdad.

Por ejemplo: En la ecuación $3x + 2y = 5$

(1,1) es solución puesto que $3.1 + 2.1 = 5$

pero también lo es (3,–2), puesto que $3.3+2.(-2) = 5$

Llamaremos **resolver** una ecuación a hallar sus soluciones.

Propiedad: Si en una ecuación se multiplican ambos miembros por un mismo numero (distinto de 0), las soluciones de la ecuación resultante no varían.

Ejemplo: En la ecuación $3x + 2y = 5$ multiplicamos por 5 ambos miembros, quedando: $15x + 10y = 25$
Las soluciones anteriores, $(1, 1)$ y $(3, -2)$ lo siguen siendo (basta sustituir y comprobar)

Igualmente ocurre, si en lugar de multiplicar se divide por un mismo número.

Sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas

Se llama así al conjunto de ***m*** ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = b_m \end{array}\right\} \quad \text{Sistema de ecuaciones con } n \text{ incógnitas}$$

$a_{ij} \in R$; x_j incógnita y $b_i \in R$

donde i toma valores desde 1,2,3,..., m

y j toma 1,2,...,n

A veces en lugar de x_1, x_2, x_3 se pone *x*, *y* y *z*. (poner ejemplo)

Se dice que $(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ es una **solución del sistema**, si lo es de cada una de las ecuaciones del sistema.

CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS

SISTEMAS
- **COMPATIBLES C** — *tienen solución*
  - **DETERMINADOS** **CD** — *Una única solución*
  - **INDETERMINADOS** **CI** — *Infinitas soluciones*
- **INCOMPATIBLES** **I** — *no tienen solución*

Nota: No es posible que un sistema de ecuaciones lineales, tenga, por ejemplo dos soluciones (ó tiene 0, ó tiene 1 ó tiene infinitas).

El proceso de hallar las soluciones de un sistema se llama **resolver** el sistema, y el de clasificar un sistema se llama **discutir** el sistema.
Dos sistemas se dice que son **equivalentes** cuando tienen exactamente las mismas soluciones.

Propiedades de los sistemas

1. Al multiplicar o dividir una o más ecuaciones de un sistema por un número distinto de 0 el sistema resultante es equivalente al primero.
2. Al cambiar el orden de dos o más ecuaciones de un sistema resultante es equivalente al primero.

3. Al cambiar el orden de las incógnitas en una o varias ecuaciones el sistema resultante es igual al primero
4. **Si una cualquiera de las ecuaciones de un sistema se sustituye por otra resultante de multiplicar aquella por un número real distinto de 0 y sumarle otras ecuaciones del mismo sistema multiplicada por ciertos números reales, el sistema resultante es equivalente al primero**

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=-5 \\ x-y+z=-2 \\ x-2y-z=-2 \end{array}\right\}$$

La solución del sistema siguiente es (1,2,–1), o escrita de otra forma, x = 1, y = 2 y z= –1 (basta sustituir en cada ecuación para comprobarlo)

Si sustituimos al segunda ecuación por la segunda ecuación: 2.2ª – 1.1ª + 1.3ª, queda:

2. 2ª	2	–2	2	–4
–1.1ª	–2	+3	–1	+5
2.2ª – 1.1ª	0	1	1	1
1.3ª	1	–2	–1	–2
2.2ª – 1.1ª + 1.3ª	1	–1	0	–1

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=-5 \\ x-y\quad\;\;=-1 \\ x-2y-z=-2 \end{array}\right\}$$

El sistema resultante es:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=-5 \\ x-y\quad\;\;=-1 \\ x-2y-z=-2 \end{array}\right\}$$

Se puede comprobar sustituyendo, que la solución inicial, sigue siendo solución de este sistema, luego es equivalente al primero.

METODO DE RESOLUCIÓN POR SUSTITUCIÓN

El método de resolución de sistemas de ecuaciones consiste en despejar de una de las ecuaciones, una de las incógnitas y sustituir el valor hallado en las otras ecuaciones. Con ello se consigue convertir el sistema original en otro sistema de una ecuación y una incógnita menos. (se suele elegir la ecuación y la incógnita que más nos faciliten la tarea a la hora de despejar).

Veamos en el ejemplo anterior:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=-5 \\ x-y+z=-2 \\ x-2y-z=-2 \end{array}\right\}$$

1º Despejamos la *x* en la segunda ecuación:

$x = y - z - 2$

2º Sustituimos la *x* en la 1ª y en la 3ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} 2.(y-z-2)-3y+z=-5 \\ (y-z-2)-2y-z=-2 \end{array}\right\}$$

Operando y simplificando queda:

$$\left.\begin{array}{l} 2y - 2z - 4 - 3y + z = -5 \\ y - z - 2 - 2y - z = -2 \end{array}\right\}$$

luego:

$$\left.\begin{array}{l} -y - z = -1 \\ -y - 2z = 0 \end{array}\right\}$$

Ahora repetimos la operación despejando la *y* en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda:

$-y = z - 1 \longrightarrow \quad y = -z + 1$, luego sustituyendo en la 2ª queda:

$-(-z + 1) - 2z = 0 \longrightarrow z - 1 - 2z = 0 \longrightarrow -z - 1 = 0$

Por tanto: $z = -1$

Sustituyendo este valor en la ecuación $y = -z + 1$, queda $y = +1 + 1$ por tanto $y = 2$ y finalmente, sustituyendo los valores de *z* e *y* hallados en la ecuación $x = y - z - 2$, queda $x = 2 + 1 - 2 = 1$

Por tanto la solución es: $\boxed{x = 1,\ y = 2 \text{ y } z = -1}$

Ej. Terminar de resolver el ejercicio de examen **6º Junio 2002 (tarde),** que se dejó inacabado en el tema 2 por necesitar conocer conceptos sobre resolución de sistemas de ecuaciones. El sistema al que se llega que no es lineal pero tiene una resolución similar. Es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 4x - 8y + 14 = 0 \\ 2x - 2y^2 + 5 = 0 \end{array}\right\} \quad Sol:\ x = \frac{-3}{2} \quad y = 1$$

Ej. Veamos otro ejercicio por sustitución (**9º Septiembre 2001)**

9.- La solución (x_1, y_1, z_1) del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 2z = 1 \\ 2x + 3y - 3z = 1 \\ 2x - 4y - 2z = -2 \end{array}\right\}$$

verifica:

A) $x_1 + z_1 \leq 1$.

B) $x_1 + y_1 \leq \frac{1}{2}$.

C) $x_1 \leq y_1 \leq z_1 \leq 0$

Solución:

Ejemplos parecidos en los exámenes de junio del 2001 se han resuelto por el método de reducción. Ahora aplicaremos el método de sustitución (páginas 141 y 142 del texto base). Despejamos una variable de una ecuación (procurando que el coeficiente sea 1) y sustituimos en las otras dos, la variable despejada. En este caso de la primera ecuación para la variable x, tenemos:

$$x = 1 + y - 2z.$$

Sustituyendo en las ecuaciones segunda y tercera:

$$\left.\begin{array}{r} 2(1 + y - 2z) + 3y - 3z = 1 \\ 2(1 + y - 2z) - 4y - 2z = -2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2+2y-4z+3y-3z = 1 \\ 2+2y-4z-4y-2z = -2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 5y-7z = 1-2 \\ -2y-6z = -2-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5y-7z = -1 \\ -2y-6z = -4 \end{array}\right\}$$

Del sistema de dos ecuaciones con las variables y,z, depejaremos y de la primera ecuación y sustituiremos en la segunda ecuación (pueden tomarse otras opciones):

$5y = 7z-1 \Rightarrow y = \frac{7z-1}{5}$. Tenemos:

$$-2\left(\frac{7z-1}{5}\right) - 6z = -4 \Rightarrow \frac{-14z+2}{5} - 6z = -4.$$

$$\frac{-14z+2}{5} - \frac{30z}{5} = \frac{-20}{5} \Rightarrow -14z+2-30z = -20 \Rightarrow -14z-30z = -20-2$$

$$-44z = -22 \Rightarrow z = \frac{-22}{-44} = \frac{1}{2}$$

Resulta

$$y = \frac{7(\frac{1}{2})-1}{5} = \frac{\frac{7}{2}-1}{5} = \frac{\frac{7-2}{2}}{5} = \frac{\frac{5}{2}}{5} = \frac{5}{2.5} = \frac{1}{2}.$$

También de la variable x despejada en la primera ecuación:

$$x = 1+\frac{1}{2}-2\left(\frac{1}{2}\right) = 1+\frac{1}{2}-1 = \frac{1}{2}.$$

Si calculamos $x_1+z_1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1 \leq 1;\ x_1+y_1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1 > \frac{1}{2};$
$x_1 = y_1 = z_1 = \frac{1}{2}.$

La respuesta válida es la A). La C) no es válida pues son positivos los valores obtenidos.

METODO DE RESOLUCIÓN DE GAUSS (ELIMINACIÓN)

El método de Gauss consiste en sustituir por medio de la aplicación de la 4ª propiedad de la página 3, el sistema por otro equivalente en el que en la segunda ecuación se elimine la incógnita *x*, en la tercera la incógnita *y*, etc… hasta llegar, en el caso de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, a un sistema en la que la última ecuación sólo tiene una incógnita, la *z*.

Entonces se despeja ésta y su valor se sustituye en la segunda, hallando el valor de *y*, y con los valores hallados se sustituye en la primera hallando el valor de *x*.

Para su aplicación daremos el siguiente concepto:

Llamaremos **matriz de m filas y n columnas** a un cuadro de m.n números ordenados. Se suele representar entre paréntesis.

Así por ejemplo, una matriz de 3 filas y 4 columnas, es por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cada sistema de ecuaciones tiene dos matrices asociadas al mismo: la **matriz de los coeficientes del sistema**, que está formada como su nombre indica por los coeficientes de las incógnitas de dicho sistema, y la **matriz ampliada** que es la matriz de los coeficientes del sistema, a la que se le añade la columna de los términos independientes.

Ej. En el caso del sistema: (Ejercicio de examen **4º de Junio de 1999 mañana**)
Halla la solución (x_1, y_1, z_1) del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} -x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 0 \end{array}\right\}$$

La matriz del sistema es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Mientras que la matriz ampliada es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como es evidente, cada matriz ampliada determina exactamente el sistema del que procede y se puede trabajar con ella, prescindiendo de las incógnitas, para facilitarnos las cosas.
Apliquemos pues el método de Gauss para resolver este sistema: Para ello, dejaremos la primera fila de la matriz igual y la multiplicaremos por los números adecuados para que al sumarla a las filas posteriores, se vayan eliminando la incógnita *x* (esto se concreta en conseguir un 0 en el lugar donde está el coeficiente de la *x* en la matriz correspondiente):

$$\left.\begin{array}{l} -x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 0 \end{array}\right\} \text{ Matriz ampliada} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rightarrow \\ 2^a + 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{2ª dividido 3}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2^a \,.\, (-4) + 3^a} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

y se escribe el sistema equivalente con sus incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} -x + y - z = 1 \\ \quad y \quad = 1 \\ \quad -2z = -3 \end{array}\right\}$$

Se despeja z:

$$z = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

Se despeja y:

$$y = 1$$

Se sustituyen los valores de z e y en la 1ª y se despeja la x:

$$-x + 1 - \frac{3}{2} = 1$$

$$-x = 1 - 1 + \frac{3}{2}$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

Por tanto la solución del sistema es: $\boxed{x = -\frac{3}{2} \quad y = 1 \quad y \quad z = \frac{3}{2}}$

Veamos otro ejemplo de Gauss, a través de uno de los ejercicios de examen propuestos: **9º Junio 2001 mañana**
La solución (x_1, y_1, z_1) del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rl} 2x + y + 2z = & 6 \\ x - 2y + 3z = & 1 \\ -x - 2y + z = & -3 \end{array}\right\} \text{ verifica:}$$

A) $y_1 + z_1 = \frac{5}{2}$

B) $x_1 \leq 0$; $y_1 \leq 3$; $z_1 \leq 1$

C) $y_1 + z_1 = \frac{7}{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right)$$ Ordenamos las filas y la 1ª pasa a la tercera posición $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[(-2).1^a + 3^a]{2^a + 1^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & 4 \end{array}\right)$$

Para conseguir eliminar la y en la tercera ecuación (consigamos un 0) :

$$\begin{array}{rcccc|c} 5.2^a & \longrightarrow & 0 & -20 & 20 & -10 \\ 4.3^a & \longrightarrow & 0 & 20 & -16 & 16 \\ \hline \text{pasa a la } 3^a \text{ posición} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \end{array}\right)$$ y se resuelve el sistema equivalente: $$\left.\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 1 \\ -4y + 4z = -2 \\ 4z = 6 \end{array}\right\} \quad z = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Sustituyendo el valor de z en la segunda ecuación queda:

$$-4y + 4 \cdot \frac{3}{2} = -2$$
$$-4y + 6 = -2$$
$$-4y = -8$$
$$y = 2$$

Finalmente sustituyendo el valor de z e y en la primera queda:

$$x - 4 + \frac{9}{2} = 1$$
$$x = 5 - \frac{9}{2}$$
$$x = \frac{1}{2}$$

Por tanto la solución es la C), ya que $y_1 + z_1 = \frac{7}{2}$ pues $2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$

Ejercicio 4 Pág. 151 (este es un ejercicio de práctica del sistema de Gauss que supera con mucho el nivel que ponen en examen)

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z + u = 9 \\ x + 3y + 2u = 7 \\ 2x - z + 3u = 2 \\ 3x + 2y - z + u = 11 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ 1^o * (-1) + 2^a \\ 1^o * (-2) + 3^a \\ 1^o * (-3) + 4^a \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & -7 & 1 & -16 \\ 0 & -4 & -10 & -2 & -16 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ \\ 2^a * 4 + 3^a \\ 2^a * 4 + 3^a \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -19 & 5 & -24 \\ 0 & 0 & -22 & 2 & -24 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ 4^a{:}2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -19 & 5 & -24 \\ 0 & 0 & -11 & 1 & -12 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -11 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & -19 & 5 & -24 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -12 \\ 0 & 0 & 5 & -19 & -24 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} & & u & z \end{array} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -12 \\ 0 & 0 & 5 & -19 & -24 \end{array}\right) \quad 3^a*(-5)+4^a \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 36 & 36 \end{array}\right)$$

Reescribamos el sistema de Gauss equivalente, teniendo en cuenta que hemos cambiado la posición de las incógnitas z y u:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+u+3z=9 \\ y+u-3z=-2 \\ u-11z=-12 \\ 36z=36 \end{array}\right\}$$

$$z=\frac{36}{36}=1$$

$$u-11\cdot 1=-12$$
$$u=-12+11$$
$$u=-1$$

$$y+(-1)-3\cdot 1=-2$$
$$y-1-3=-2$$
$$y=-2+1+3$$
$$y=2$$

$$x+2\cdot 2-1+3\cdot 1=9$$
$$x+4-1+3=9$$
$$x=9-4+1-3$$
$$x=3$$

La solución es:
x = 3; y = 2; z = 1; u = –1

Ejercicio 5 Pág. 151

De una caja que contiene piezas de los tipos A y B se desea determinar su peso y el peso de cada una de las piezas. Para ello se sabe que:

a) Dos cajas y una pieza A pesan 19 Kg.
b) Una pieza A y una caja de la cual se han extraído dos piezas B pesa 6 Kg.
c) Tres cajas, una pieza A y tres piezas B pesan 34 Kg.

Si llamamos *A = "peso de una pieza del tipo A"*
B = "peso de una pieza del tipo B"
C = "peso de una caja"

$$\left.\begin{array}{ll} a) & A+2C=19 \\ b) & A-2B+C=6 \\ c) & A+3B+3C=34 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 19 \\ 1 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 34 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 1^a*(-1)+2^a \\ 1^a*(-1)+3^a \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 19 \\ 0 & -2 & -1 & -13 \\ 0 & 3 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

2ª por el 3 de la tercera
3ª por el 2 de la segunda
pasa a la 3ª posición

$$\begin{array}{cccc} 0 & -6 & -3 & -39 \\ 0 & 6 & 2 & 30 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-9} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 19 \\ 0 & -2 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} A+2C=19 \\ -2B-C=-13 \\ -C=-9 \end{array}\right\}$$

$C=9$

$$-2B-9=-13$$
$$-2B=-13+9$$
$$-2B=-4$$
$$B=2$$

$$A+2.\,9=19$$
$$A+18=19$$
$$A=19-18$$
$$A=1$$

A = 1 ; B = 2 ; C = 9
Luego la pieza A pesa 1 Kg., la pieza B pesa 2 Kg. y la caja pesa 9 Kg.

Hacer ejercicios de exámenes:

1º de septiembre de 1998
4º de junio de 1999 (mañana) (hecho ya en clase como ejemplo de Gauss)
8º de junio de 1999 (tarde)
6º de junio de 2000 (mañana)

9º de junio de 2001 (mañana) (hecho ya en clase como ejemplo de Gauss)
1º de junio de 2001 (tarde)
9º de septiembre de 2001 (resuelto en los apuntes por sustitución)
6º de junio de 2003 (m) (igual que el 6º de junio de 2000 por la mañana, pero cambiando el papel de las incógnitas)
6º de junio de 2003 (t) (igual que el 6º de junio de 2000 por la mañana, pero cambiando el papel de las incógnitas)
10º de septiembre de 2003 (igual que el 6º de junio de 2000 por la mañana, pero cambiando el papel de las incógnitas)
9º de junio de 2004 (m) (se resuelve mejor por la regla de Cramer que veremos más adelante)
10º de junio de 2004 (t) (se resuelve mejor por la regla de Cramer que veremos más adelante)
Hay otros sistemas que han salido en exámenes, pero que no se pueden resolver de esta manera y los veremos en el tema 9.
(Algunos de los ejercicios anteriores están desarrollados en las páginas siguientes)

En 2005 no hubo exámenes de sistemas de ecuaciones.

Los que han salido en 2006, los resolveremos en el tema 9 aplicando el Teorema de Rouché y el método de Cramer.
Los ejercicios del 2007 de junio tarde y septiembre se resolverán por el T. de Rouché, en cuanto al 10º de junio de 2007 por la mañana es el mismo de junio de 2003 por la mañana.

EJERCICIOS DE EXAMENES TEMA 7

Sep. de 1998 (1º)

$$\left.\begin{array}{l}2x-y-3z=1\\-x+2y-z=5\\3x+y+z=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c}-1&2&-1&5\\2&-1&-3&1\\3&1&1&1\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c}-1&2&-1&5\\0&3&-5&11\\0&7&-2&16\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c}-1&2&-1&5\\0&3&-5&11\\0&0&-29&21\end{array}\right]$$

$3^a \Rightarrow 7.2^a+(3).3^a$

$$\left.\begin{array}{l}-x+2y-z=5\\3y-5z=11\\-29z=29\end{array}\right\} \qquad z=\frac{29}{-29}=-1$$

3y + 5 = 11   3y = 6   y = 2

-x + 4 + 1 = 5   -X = 0 x = 0

SOLUCIÓN x = 0 y = 2 z = -1

Junio de 1999 (m) 4º (Ver apuntes: hecho en clase)
Junio de 1999 (t) 8º

$$\left.\begin{array}{l}2x+y+3z=3\\x-y-z=0\\5x-3y-2z=6\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&-1&0\\2&1&3&3\\5&-3&-2&6\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&-1&0\\0&3&5&3\\0&2&3&6\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&-1&0\\0&3&5&3\\0&0&1&-12\end{array}\right]$$

$3^a \Rightarrow 2\ .2^a+(-3).3^a$

$$\left.\begin{array}{l}x-y-z=0\\3y+5z=3\\z=-12\end{array}\right\}$$

z = -12

3y-60 =3   => 3y = 63 y = $\frac{63}{+3}$ = +21 y = $\frac{63}{+3}$ = +21

x - 21 + 12=0 => x = 9

SOLUCIÓN x = 9   y = 21 z = -21

Junio 2000 (m) 6º

$$\left.\begin{array}{l}x+3y-2z=0\\4x-3y+z=1\\2x-y+z=3\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c}1&3&-2&0\\4&-3&1&1\\2&-1&1&3\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c}1&3&-2&0\\0&-15&9&1\\0&-7&5&3\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c}1&3&-2&0\\0&-15&9&1\\0&0&-12&-38\end{array}\right]$$

$3^a \Rightarrow 7.2^a+(-15)\ 3^a$

$$\left.\begin{array}{l}x+3y-2z=0\\-15y+9z=1\\-12z=-38\end{array}\right\} \quad z=\frac{-38}{-12}=\frac{19}{6}$$

-15y+9 $\frac{19}{6}$=1 => -15y + $\frac{57}{2}$ = 1 => -15y = 1 - $\frac{57}{2}$ => -15y= $\frac{-55}{2}$

y = $\dfrac{-55}{-30}$ = $\dfrac{11}{6}$

x + 3 $\dfrac{11}{1}$ = 1 => -15y + $\dfrac{57}{2}$ = 1 => -15y = 1 - $\dfrac{-57}{2}$ => -15y= $\dfrac{-55}{2}$

y = $\dfrac{-55}{-30}$ = $\dfrac{11}{6}$

x + 3 $\dfrac{11}{6}$ -2 $\dfrac{19}{6}$ = 0 => x + $\dfrac{11}{2}$ - $\dfrac{19}{3}$ = 0 => x = $\dfrac{19}{3}$ - $\dfrac{11}{2}$ = $\dfrac{38-33}{6}$ = $\dfrac{5}{6}$

$$\boxed{\text{SOLUCIÓN } x = \frac{5}{6} \quad y = \frac{11}{6} \quad z = \frac{19}{6}}$$

Junio 2001 (m) 9º (Hecho en clase: ver apuntes)
Junio 2001 (t) 1º

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+2z=6 \\ -2x+3y+z=1 \\ -2x+y-z=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 6 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 5 & 13 \\ 0 & 5 & 3 & 9 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

3ª => 5 .2ª+(-7)3ª

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+2z=6 \\ 7y+5z=13 \\ 4z=2 \end{array}\right\} \quad z= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

7y + $\dfrac{5}{2}$ = 13 => 7y = $\dfrac{13}{1}$ - $\dfrac{5}{2}$ = $\dfrac{21}{2}$

y = $\dfrac{21}{14}$ = $\dfrac{3}{2}$

x + 3 +1 = 6 => x = 2

x + 3 +1 = 6 => x= 2

$$\boxed{\text{SOLUCIÓN} \quad x = 2 \quad y = \frac{3}{2} \quad z = \frac{1}{2}}$$

Septiembre 2001 (9º)

$$\left.\begin{array}{l} x-y+2z=1 \\ 2x+3y-3z=1 \\ 2x-4y-2z=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & -2 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

Dividiendo por 2 la 3ª

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -7 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -7 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -22 & -11 \end{array}\right]$$

Cambiando de orden 2ª y 3 ª

$$\left.\begin{array}{l} x - y + 2z = 1 \\ y + 3z = 2 \\ -22z = -11 \end{array}\right\} \quad z = \frac{-11}{-22} = \frac{1}{2}$$

$y + \frac{3}{2} = 2$ $\quad$ $y = 2 - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $x - \frac{1}{2} + 1 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\text{SOLUCIÓN } x = \frac{1}{2} \quad y = \frac{1}{2} \quad z = \frac{1}{2}}$$

Junio 2003 (m) 6º

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 3 \\ -3x + y + 4z = 1 \end{array}\right\} \quad \text{Solución } x = \frac{11}{6} \quad y = \frac{19}{6} \quad z = \frac{5}{6}$$

Es distinto al de junio 2000(m) (6º) pero cambiando en aquel la x por la z, la y por la x y z por la y.

Junio 2003(t) 6º

El mismo por junio 20003(m) 6º, pero cambiando la x por la y, y la y por la x

Solución $x = \frac{19}{6}$ $y = \frac{11}{6}$ $z = \frac{5}{6}$

Septiembre 2003 10º

El mismo de junio 2003 (m) 6º pero cambiando la y por la z y la z por la y.

Solución $x = \frac{11}{6}$ $y = \frac{5}{6}$ $z = \frac{19}{6}$

---

* Este tema ha sido pasado a soporte informático por los alumnos **José Miguel Sánchez y Jesús Ramil**, basándose en el **libro Matemáticas Especiales, de E. Bujalance y otros**, editado por la **editorial Sanz y Torres** y en las explicaciones dadas en las tutorías presenciales, por el profesor tutor del Centro de la UNED **Alzira-Valencia** "Francisco Tomás y Valiente", **José Luis Lombillo**, que los ha corregido, completado y ampliado. También ha participado en la edición de los exámenes del Tema 7 **Miguel Ángel Portillo**.